AKADEMIET FOR DE TEKNISKE VIDENSKABER

GEOTEKNISK INSTITUT

THE DANISH GEOTECHNICAL INSTITUTE

BULLETIN No. 1

J. BRINCH HANSEN

BRUDSTADIEBEREGNING OG PARTIALSIKKERHEDER I GEOTEKNIKKEN

LIMIT DESIGN AND SAFETY FACTORS IN SOIL MECHANICS

COPENHAGEN 1956

GEO
www.geo.dk

Brudstadieberegning og partialsikkerheder i geoteknikken

Limit Design and Safety Factors in Soil Mechanics (With an English Summary)

Af professor, dr. techn. J. Brinch Hansen

624.131.5

1. Indledning.

Ved projekteringen af et bygværk og dettes enkelte dele bør man principielt undersøge såvel *sikkerheden mod brud* som størrelsen af de *deformationer*, der vil optræde under normal belastning. I visse tilfælde kan man i praksis undlade deformationsanalysen, hvorimod brudanalysen næsten altid vil være påkrævet.

I sådanne tilfælde, hvor der er fuldstændig *proportionalitet* mellem de ydre belastninger og de indre spændinger, vil een beregning kunne give de fornødne oplysninger om såvel brudsikkerheden som deformationerne. Imidlertid findes der efterhånden et stort antal områder, hvor en sådan proportionalitet ikke eksisterer. Som eksempler kan nævnes forspændte og foranderlige konstruktioner. I geoteknikken gør der sig det specielle forhold gældende, at nogle af de ydre belastninger (jordtryk og fundamentstryk) afhænger af selve konstruktionens deformationer.

Når dette er tilfældet, er man nødt til at basere sin dimensionering eller beregning på forholdene i *brudstadiet*. Man bør naturligvis betragte konstruktionen med dennes *virkelige dimensioner*, og det er en selvfølge, at de virkende ydre og indre kræfter må være i ligevægt.

Det følger heraf straks, at man ved en brudstadie-beregning ikke på een gang kan operere med de foreskrevne ydre belastninger og maksimale spændinger svarende til materialernes brudstyrker. Den nødvendige ligevægt mellem ydre og indre kræfter kan imidlertid opnås på een af følgende 3 måder:

1) Man kan anvende de foreskrevne ydre belastninger og samtidig begrænse den maksimale spænding til en vis brøkdel af materialets brudstyrke. Dette er den klassiske metode med »*tilladelige spændinger*«.

2) Man kan multiplicere de foreskrevne ydre belastninger med visse faktorer og samtidig tillade en maksimal spænding lig materialets brudstyrke. Således dimensioneres f. eks. visse jernbetonkonstruktioner med en »*brudbelastning*« 1,5 g + 2,5 p.

3) Man kan multiplicere de foreskrevne ydre belastninger med visse *partialsikkerheder* og samtidig begrænse den maksimale spænding til materialets brudstyrke divideret med en anden partialsikkerhed. Dette svarer til civiling. A. J. Moes forslag og er den metode, vi for tiden forsøger på at indføre i geoteknikken her i landet.

I princippet må det være rigtigt at indføre en partialsikkerhed på enhver størrelse, der kun er kendt med en vis *grad af nøjagtighed*. Da dette både gælder de ydre belastninger og materialernes brudstyrker, er det lige så forkert at lægge hele sikkerheden på brudstyrkerne som at lægge hele sikkerheden på belastningerne.

2. Geotekniske problemer.

Ved en nærmere betragtning af de specielt *geotekniske problemer* viser det sig iøvrigt, at et konsekvent system overhovedet kun kan gennemføres ved at sætte partialsikkerheder på såvel belastninger som brudstyrker.

Hvis man f. eks. ville forsøge kun at have sikkerhed på *materialstyrkerne*, da måtte dette gælde ikke alene de egentlige byggematerialers brudstyrker, men også jordarternes forskydningsstyrker, idet jorden selv i mange geotekniske konstruktioner (f. eks. dæmninger) er det eneste byggemateriale. Man måtte altså for jorden regne med en vis »tilladelig« forskydningsstyrke mindre end den virkelige.

Eventuelle aktive *jordtryk* på en konstruktion ville da, når de blev beregnet på basis af den »tilladelige« forskydningsstyrke, blive større end de virkelige, og det ville derfor ikke være korrekt at regne med normale tilladelige spændinger i en jordtrykspåvirket konstruktion. Man kunne selvfølgelig regne med forhøjede tilladelige spændinger, men da konstruktionen samtidig kan være påvirket af andre ydre belastninger, måtte også de multipliceres op — i strid med forudsætningen.

Hvis man omvendt ville forsøge kun at have sikkerhed på de ydre *belastninger*, måtte man regne med jordens virkelige forskydningsstyrke. De tilsvarende jordtryk ville da være de virkelige, og i en jordtrykspåvirket konstruktion ville det derfor være utilladeligt at regne med spændinger på brudgrænsen. Man kunne måske tænke sig at klare dette problem ved at multiplicere aktive jordtryk med en vis faktor, men man ville stadig ikke kunne klare stabilitetsproblemerne.

En *sandskråning*, der står med en hældning lig friktionsvinklen, er netop på nippet til at skride. Dette forhold ændres ikke, selv om man multiplicerer den eneste virkende belastning, nemlig sandets egenvægt, med et vilkårligt tal. Her kan en sikkerhed åbenbart kun indføres på sandets forskydningsstyrke (friktionsvinkel).

Selv i sådanne stabilitetproblemer, hvor det i og for sig ville være muligt at sætte sikkerheden på belastningerne, ville det ikke være logisk at gøre det, idet jordens vægt altid kendes med langt større nøjagtighed end dens forskydningsstyrke.

Da et konsekvent system i geoteknikken således hverken kan gennemføres med »tilladelige spændinger« alene, eller med »brudbelastninger« alene, er der kun den mulighed tilbage at operere med *partialsikkerheder* på såvel belastningerne som på materialstyrkerne.

Det almindelige princip for en brudstadieberegning i geoteknikken bliver derfor at betragte en *regningsmæssig brudtilstand*, i hvilken de ydre belastninger er multipliceret med passende partialsikkerheder, medens samtidig jordarternes og byggematerialernes brudstyrker er divideret med andre partialsikkerheder. Når konstruktionens ydre og indre dimensioner afpasses således, at der netop er ligevægt i det regningsmæssige brudstadium, vil den fornødne totalsikkerhed være tilstede.

I sådanne tilfælde, hvor en *hvilende* belastning virker til gunst for stabiliteten, må man naturligvis *dividere* med partialsikkerheden i stedet for at multiplicere. Under tilsvarende omstændigheder skal en *bevægelig* belastning selvfølgelig helt *udelades*.

Ved fastsættelsen af de forskellige partialsikkerheders *størrelse* bør man dels tage hensyn til *usikkerheden* på bestemmelsen af den omhandlede belastning eller styrke, og dels bør man forsøge at fastlæg-

GEO www.geo.dk

ge et sådant system af partialsikkerheder, at man i gennemsnit får bedst mulig *overensstemmelse* med allerede udførte konstruktioner, hvis dimensioner erfaringsmæssigt har vist sig at være rimelige.

3. Egenvægte.

I geotekniske problemer vil en væsentlig del af belastningerne altid stamme fra *egenvægt* af jord eller konstruktioner. Da sådanne vægte kan bestemmes med stor nøjagtighed ved hjælp af meget simple forsøg, kan man nøjes med en lille partialsikkerhed.

I og for sig kunne det måske være rimeligt at sætte denne partialsikkerhed til f. eks. 1,05; men dette ville føre til en del *regningsmæssige komplikationer*, idet det for visse dele af egenvægtene ville være nødvendigt at multiplicere, og for andre at dividere med partialsikkerheden. I nogle tilfælde, specielt i jordtryksproblemer, kunne det være ret vanskeligt at finde ud af, hvilke jordvolumina, der skulle behandles på den ene eller på den anden måde. For simpelheds skyld må det derfor anbefales at regne med partialsikkerheden:

$$n_g = 1{,}0.$$

Ifølge civiling. A. J. Moes forslag skulle man regne med $n_g = 1{,}2$. Dette forekommer imidlertid dels noget højt i forhold til den mulige usikkerhed på bestemmelsen af egenvægte, og dels ville det føre til en urimelig lav partialsikkerhed på andre størrelser. Som det skal vises i næste afsnit, kan partialsikkerheden på sands forskydningsstyrke ikke sættes væsentligt højere end til $n\mu = 1{,}2$, selv når man regner med $n_g = 1{,}0$. Skulle man sætte $n_g = 1{,}2$, måtte man omvendt nedsætte $n\mu$ til omtrent 1,0, hvilket ville være et åbenlyst urimeligt forhold, da sands rumvægt naturligvis kan bestemmes med større nøjagtighed end dets friktionsvinkel.

4. Friktionsjord.

For ren friktionsjord (sand, grus og sten) skal man i det regningsmæssige brudstadium forudsætte en *regningsmæssig friktionsvinkel* φ_r, der bestemmes ud fra den virkelige (målte) friktionsvinkel φ ved formlen:

$$\tan \varphi_r = \frac{\tan \varphi}{n\mu}$$

For at fastsætte størrelsen af $n\mu$ kan man betragte sådanne stabilitets- eller jordtryksproblemer, ved hvilke de ydre belastninger stort set kun består af egenvægte. Som eksempel kan tages en *forankret spunsvæg* med ankerplader.

Ifølge de nugældende danske normer (1952) skal sikkerheden på *rammedybden* nominelt være mindst 2, hvilket vil sige, at dersom den teoretisk nødvendige rammedybde kaldes d, skal den virkelige rammedybde være mindst 1,41 d. Imidlertid regnes der ifølge normerne kun med aktivt jordtryk ned til dybden 0,67 d, således at der er set bort fra det faktiske aktive tryk på de nederste 0,74 d af væggen. Tages der hensyn hertil, bliver det maksimalt opnåelige passive tryk ikke 2 gange det til ligevægt nødvendige, men højst 1,5 gange. Da en formindskelse af φ på een gang forøger det aktive og formindsker det passive jordtryk, svarer dette til, at $n\mu$ i virkeligheden kun er omkring 1,2.

Hvad *ankerplader* angår, skal der ifølge normerne ligeledes være en nominel sikkerhed på mindst 2, hvilket vil sige, at ankerpladen skal kunne modstå det dobbelte af det beregnede ankertræk. Samtidig tillader normerne dog, at det passive jordtryk på ankerpladen beregnes med $\delta = \frac{1}{2}\varphi$. En simpel ligevægtsbetragtning vil imidlertid vise, at det i virkeligheden sjældent er muligt at opnå mere end $\delta \backsim \frac{1}{5}\varphi$, hvilket vil sige, at en efter normerne dimensioneret ankerplade normalt kun kan optage ca. 1,5 gange det beregnede ankertræk. Da en formindskelse af φ på een gang forøger ankertrækket (der i hovedsagen skyldes aktivt jordtryk på spunsvæggen) og formindsker det passive jordtryk på ankerpladen, svarer dette til, at $n\mu$ faktisk vil være omkring 1,2.

Hvis man endelig for de efter de klassiske metoder bestemte *ankerlængder* prøver på at udføre en stabilitetsundersøgelse som den af forfatteren beskrevne, vil man finde, at den til ligevægt nødvendige, regningsmæssige friktionsvinkel svarer til et $n\mu$ på højst 1,2.

Af ovenstående følger, at såfremt man ikke ønsker i væsentlig grad at fordyre konstruktioner som de omtalte, vil det være nødvendigt i *jordtryks- og stabilitetsproblemer* at regne med den tilsyneladende meget lave værdi:

$$n\mu = 1{,}2.$$

Det skal dog i denne forbindelse bemærkes, at nyere undersøgelser tyder på, at sands virkelige, indre friktionsvinkel faktisk er en del større end den, der måles ved de konventionelle laboratorieforsøg. Disse forsøg og deres sædvanlige tolkning implicerer derfor sandsynligvis en vis skjult ekstrasikkerhed. Hvis man en gang når frem til en bedre bestemmelse af φ, må man rimeligvis samtidig forøge $n\mu$.

5. Byggematerialer.

Når jordtryk beregnes svarende til $n\mu = 1{,}2$, vil de regningsmæssige aktive jordtryk på f. eks. en forankret spunsvæg være ca. 1,25 gange så store som de virkelige, og dette gælder da også for de heraf forårsagede momenter i spunsvæggen og kræfter i forankringen. Følgelig kan man for de *regningsmæssige påvirkninger* ikke dimensionere med normale tilladelige spændinger, men må alene af denne grund forøge disse med mindst 25 %. Desuden er der i vandbygningen allerede tradition for at anvende højere spændinger end de normale; således tillader de gældende normer (1952) for jordtrykspåvirkninger i forankrede spunsvægge 23 % spændingsforhøjelse. Endelig er de virkende kræfter på funderings- og vandbygnings-konstruktioner overvejende af hvilende art, og for sådanne påvirkninger vil det være rimeligt at tillade noget højere spændinger end normalt.

Når alt dette tages i betragtning, forekommer det rimeligt at foreslå, at der for de regningsmæssige påvirkninger, der svarer til de i denne artikel angivne partialsikkerheder, dimensioneres med *regningsmæssige spændinger*, der er *50 % højere* end de for de pågældende byggematerialer normalt foreskrevne tilladelige spændinger (for forspændt beton gælder dog særlige regler).

For almindeligt *stål 37* svarer denne regel til anvendelse af en regningsmæssig spænding på $1{,}5 \cdot 1300 = 1950$ kg/cm². Da stålets flydespænding gennemsnitligt er 2400 kg/cm², bliver den anvendte partialsikkerhed på denne styrke lidt over 1,2.

6. Bevægelige belastninger.

En *spunsvæg* er ofte, foruden af de fra jordtrykket stammende momenter, påvirket af aksiale kræfter, f. eks. forårsagede af en kranbelastning. Da det ville være upraktisk at ændre de regningsmæssige materialspændinger, og da man selvfølgelig ikke kan tillade 50 % spændingsforhøjelse for de fra en bevægelig belastning stammende påvirkninger, må man til gengæld multiplicere den *bevægelige belastning* med en partialsikkerhed. Når denne sættes til:

$$n_p = 1{,}5$$

vil man have opnået, at de hertil svarende påvirkninger i virkeligheden optages med normale tilladelige spændinger.

Et lignende problem opstår, når f. eks. en *kajoverbygning* skal dimensioneres for en samlet påvirkning, der dels stammer fra en direkte hvilende og bevægelig last, og dels overføres som ankerkraft og indspændingsmoment fra en spunsvæg. Sidstnævnte påvirkninger vil være forøgede med ca. 25 %, når

GEO www.geo.dk

man har anvendt de regningsmæssige forskydningsstyrker for jorden, og når man modvirker dette ved at dimensionere med 50 % forøgede regningsmæssige spændinger, må man *til gengæld multiplicere* den bevægelige belastning med 1,5.

Den *hvilende* belastning multipliceres derimod kun med 1,0, og for denne vil man altså efter forslaget dimensionere med 50 % højere spændinger end de normalt tilladelige; men dette må anses for forsvarligt under hensyn til den store nøjagtighed, med hvilken den hvilende belastnings størrelse kendes.

Iøvrigt forekommer der tilfælde, hvor en bevægelig belastning er ansat så *højt*, at den i praksis næppe kan overskrides (f. eks. de normerede akseltryk for en togbelastning). I sådanne tilfælde kan man naturligvis nedsætte n_p, eventuelt helt ned til $n_p = 1{,}0$.

Eventuelle *stødtillæg* til en bevægelig belastning skal inkluderes i p, da de ikke dækkes af n_p.

7. Andre belastninger.

Foruden de anførte partialsikkerheder på egenvægte og nyttelast må der også indføres partialsikkerheder på eventuelle andre optrædende belastninger. Den vigtigste af disse er *vandtryk*. For at bestemme størrelsen af n_v kan man f. eks. betragte en *stålspunsvæg*, der alene er påvirket af vandtryk. For stål 37 er den regningsmæssige spænding 1950 kg/cm², og dette ville man få, hvis man satte $n_v = 1$. Dette er naturligvis for meget, men sætter man:

$$n_v = 1{,}2$$

får man en virkelig spænding på godt 1600 kg/cm², hvilket må betegnes som rimeligt, når belastningens størrelse kendes så nøjagtigt, som tilfældet er med vandtryk.

Man kan også betragte en sandfyldt *cellefangedæmning* på klippe. Når denne beregnes efter den af forfatteren angivne metode, og med $n\mu = 1{,}2$, kan man kun komme til de i praksis almindeligt anvendte dimensioner (b/h = 0,85) ved at sætte $n_v = 1{,}2$.

Som tidligere nævnt skal en vilkårlig størrelse enten multipliceres eller divideres med sin partialsikkerhed, afhængigt af, hvad der er farligst. Det må dog pointeres, at forskellige dele af *samme* størrelse skal behandles *ens*. Således skal i tilfælde af vandtryk på de to sider af en væg *begge* vandtryk enten multipliceres eller divideres med n_v.

En anden belastning, der undertiden optræder, er det såkaldte *hviletryk*, som jord udøver på ueftergivelige vægge. Man kan her regne med en partialsikkerhed:

$$n_h = 1{,}3.$$

8. Kohæsionsjord.

Hvis man herefter betragter ren kohæsionsjord (vandmættet ler), må der på dettes forskydningsstyrke c indføres en partialsikkerhed n_c, således at man opererer med en *regningsmæssig forskydningsstyrke* defineret ved:

$$c_r = \frac{c}{n_c}$$

I *stabilitetsproblemer* vedrørende ler er det almindeligt at forlange en totalsikkerhed omkring 1,5, og da hovedparten af belastningerne i sådanne problemer er egenvægte, svarer dette omtrent til:

$$n_c = 1{,}5.$$

I *jordtryksproblemer* vedrørende ler vil det være rimeligt at anvende samme partialsikkerhed.

9. Fundamenter og pæle.

Fundamenter og pæle i *friktionsjord* (sand) skal ifølge det ovenstående dimensioneres for et regningsmæssigt brudstadium med $n_g = 1{,}0$, $n_p = 1{,}5$ og $n\mu = 1{,}2$. Fra plasticitetsteorien ved man, at $n\mu = 1{,}2$ stort set svarer til en halvering af fundamentets eller pælens bæreevne. Dette vil sige, at *totalsikkerheden* for fundamentet eller pælen vil ligge mellem ydergrænserne 2,0 (ren egenvægt) og 3,0 (ren nyttelast). Dette svarer nogenlunde til nyere praksis på dette område, og man kan altså for *fundamenter og pæle* i friktionsjord anvende den samme partialsikkerhed som for stabilitet og jordtryk:

$$n\mu = 1{,}2$$

Betragter man derimod fundamenter og pæle i *kohæsionsjord* (vandmættet ler), er bæreevnen her omtrent proportional med lerets forskydningsstyrke. Med $n_g = 1{,}0$, $n_p = 1{,}5$ og $n_c = 1{,}5$, som angivet ovenfor, ville man få totalsikkerheder mellem 1,5 og 2,25, hvilket er for lidt. Sætter man derimod for *fundamenter* i kohæsionsjord partialsikkerheden til:

$$n_c = 1{,}7$$

får man en *totalsikkerhed* mellem 1,7 og 2,55, hvilket stemmer godt med nyere praksis. For *pæle* i kohæsionsjord må man sætte partialsikkerheden lig:

$$n_c = 2{,}0$$

idet dette giver *totalsikkerheder* mellem 2,0 og 3,0 ligesom for pæle i friktionsjord.

Rent logisk kan denne variation af n_c begrundes på følgende måde. Brudzonerne for fundamenter og pæle er af betydelig mindre udstrækning end dem, der optræder i stabilitets- og jordtryksproblemer. Tilfældige variationer spiller derfor en større rolle ved fundamenter og pæle, hvilket bør give sig udtryk i en større sikkerhedsgrad. For pæle kommer hertil det specielle forhold, at pæleramningen omrører leret og derved ændrer dets styrke på tildels ukendt måde. Derfor må man have større sikkerhed på pæle end på fundamenter.

Pæles bæreevne bestemmes iøvrigt ofte på anden måde end ved en statisk brudberegning, nemlig ved *prøveramning* eller *prøvebelastning*. Når pælens virkelige brudbelastning bestemmes ved en af de to sidstnævnte metoder, må den divideres med en partialsikkerhed n_b, og den herved bestemte *regningsmæssige bæreevne* kan da på normal måde indføres i brudstadiedimensioneringen. Man sætter ved anvendelse af:

En god rammeformel:	$n_b = 2{,}0$
Prøvebelastning:	$n_b = 1{,}6$

Ved anvendelse af disse partialsikkerheder i forbindelse med $n_g = 1{,}0$ og $n_p = 1{,}5$ fås *totalsikkerheder* mellem 2,0 og 3,0 ved rammeformlen, og mellem 1,6 og 2,4 ved prøvebelastning. Dette stemmer nogenlunde med nyere praksis på dette område.

Rammeformler må som bekendt kun anvendes i *friktionsjord*.

10. Specielle belastningstilfælde.

For *ekstraordinære* belastningstilfælde af *kort varighed* kan sikkerhederne reduceres noget. Man kan således regne med $n_p = 1{,}0$ og $n_v = 1{,}1$, medens de normale værdier af n_c og n_b kan formindskes med ca. 10 %. De øvrige partialsikkerheder ændres derimod ikke, og det samme gælder de regningsmæssige materialspændinger.

11. Resumé.

Det foreslåede system af partialsikkerheder i geoteknikken (der tildels er et resultat af diskussioner i udvalget til revision af funderingsnormerne) kan resumeres som følger, idet tallene i parentes svarer til ekstraordinære, kortvarige belastningstilfælde:

Egenvægte:	$n_g = 1{,}0$	(1,0)
Nyttelast:	$n_p = 1{,}5$	(1,0)
Vandtryk:	$n_v = 1{,}2$	(1,1)
Hviletryk:	$n_h = 1{,}3$	(1,3)
Friktionsjord:	$n\mu = 1{,}2$	(1,2)
Kohæsionsjord:		
Stabilitet:	$n_c = 1{,}5$	(1,4)
Jordtryk:	$n_c = 1{,}5$	(1,4)
Fundamenter:	$n_c = 1{,}7$	(1,5)
Pæle:	$n_c = 2{,}0$	(1,8)
Rammeformel:	$n_b = 2{,}0$	(1,8)
Prøvebelastning:	$n_b = 1{,}6$	(1,4)
Byggematerialer:	Till. sp. + 50 %	

Forfatteren kan ikke se rettere, end at et tilsvarende system med lidt ændrede partialsikkerheder (eller muligvis endda de samme)

GEO www.geo.dk

med fordel måtte kunne anvendes også for bærende konstruktioner og på andre beslægtede områder.

Summary in English.

In the design of any structure two separate analyses should in principle be made: one for determining the safety against failure, and another for determining the deformations under actual working conditions.

The failure analysis can in practice be made in three different ways:

1) Using the prescribed loads and limiting the corresponding maximum stress to a certain fraction of the limit strength of the material.
2) Multiplying the prescribed loads with certain safety factors and allowing the corresponding maximum stress to reach the limit strength of the material.
3) Multiplying the prescribed loads with certain (partial) safety factors and limiting the corresponding maximum stress to the limit strength of the material divided by another (partial) safety factor.

The third method must be the logical one, because a safety factor should be applied to any quantity, which is not known accurately, and this implies the loads as well as the limit strengths of the materials.

In soil mechanics certain loads, earth pressures and foundation pressures, depend on the shear strength of the soil and on the deformations of the structure. As shown by the author, a logical consequence of this fact is, that a consistent system of safety factors can only be devised by the third method mentioned above.

Therefore, a limit design in soil mechanics should, according to the author's proposal, be made in the following way. A nominal state of failure is considered, in which the prescribed loads are multiplied by suitable (partial) factors of safety, whereas the strengths of the soils and building materials are divided by other (partial) factors of safety. When the exterior and interior dimensions of the structure are fixed in such a way, that equilibrium exists in the nominal state of failure, the structure will be sufficiently safe.

The actual values of the partial factors of safety should be determined in such a way, that the proposed design method will — on the average — lead to approximately the same dimensions as those, which have proved suitable in practice. A list of such values is given in the paper.

GEO
www.geo.dk